

《可能世界的名字》述评

刘新文, 祝瑞, 可能世界的名字, 2017年, 北京: 中国社会科学出版社

混合逻辑 (hybrid logic) 是模态逻辑中一个十分活跃的分支, 它为模态逻辑的许多经典结论都提供了良好的改进方法。混合逻辑的基本观点, 即“对命题变元分类”和“词项用作公式”, 来自于上世纪六十年代的逻辑学家普莱尔 (A. Prior) 在时态逻辑领域中所做的工作。

基于哲学家麦克塔格特 (J. M. E. McTaggart) 对时间概念的分析, 存在着两种时序关系: A 序列和 B 序列。普莱尔分别用 T-演算 (时态逻辑) 和 U-演算 (一阶对应语言) 来刻画它们。虽然 U-演算的表达力明显强于 T-演算, 但普莱尔认为 U-演算应该被归约到 T-演算之中。为此, 普莱尔采用了混合的方案和技术增强时态逻辑的表达力, 将时态逻辑扩张为混合时态逻辑, 也就是在时态逻辑语言中添加一类被称之为“世界变元”或“世界状态命题”的命题符号、模态词 E (或者“ \diamond ”) 和 A (或者“ \square ”) 以及量词 \forall 和 \exists 。最终证明了 U-演算的所有假设都可以在混合时态逻辑中得到证明, 因此证得对 U-演算的归约。

但普莱尔的上述思想在当时并没有受到应有的重视。直到上世纪九十年代, 逻辑学家们才充分发掘和认识到普莱尔系列工作的意义, 提出了对现代混合逻辑的设想。现代混合逻辑的基本语言是在传统模态语言中添加一类 (可数无穷多的) 新的命题变元——名字 i , 和满足算子 $@$ 。基本混合语言的合式公式可定义为:

$$\phi ::= p \mid i \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi \mid @_i\phi \mid \diamond\phi$$

与普通模态语言不同的是, 在句法上 i 是原子公式, 表示某个可能世界的名字, 且可以与其他公式和逻辑联结词组成新的公式, 即纯公式; 还可以与满足算子组成满足公式“ $@_i\phi$ ”。特别地, “ $@_i j$ ”表示“ $i = j$ ”。

一个混合逻辑的模型 \mathcal{M} 是一个三元组 $\langle W, R, V \rangle$ 。其中, $\langle W, R \rangle$ 是一个框架, W 是一个非空的可能世界集, R 是 W 上的二元可及关系; V 是 \mathcal{M} 中原子的赋值函数。值得注意的是, 对于命题变元 p , $V(p)$ 是命题变元 p 在其上为真的可能世界的集合; 而对于名字 i , $V(i)$ 是由名字 i 所命名的唯一的可能世界组成的单元元素集。相对于普通的正规模态逻辑, 混合语言中的“新”公式 i 和 $@_i\phi$ 在模型 \mathcal{M} 中某一可能世界 w 上的满足可定义为:

- (1) $M, w \models i$ 当且仅当 $V(i) = \{w\}$;
 (2) $M, w \models @_i\phi$ 当且仅当 $M, V(i) \models \phi$ 。

其中, (2) 是说在模型 M 中公式 ϕ 在以 i 命名的可能世界上是可满足的。

其实, 在现代模态逻辑中, 关系语义学作为研究模态逻辑语义的基本工具同样缺乏描述内部可能世界的机制, 也就是模态逻辑的“不对称”问题, 即“关系语义学的局部视角与标准模态语言之间的对应并不完美”。([2]) 模态逻辑的这一“弱点”导致模态逻辑不能刻画模型中特殊的可能世界, 也无法表示可能世界之间的相等关系, 因此在应用中它并非是恰当的表达形式系统。此外, 模态逻辑的“不对称”也使得我们很难找到可用的、合适的模态演绎系统。

刘新文和祝瑞所著的《可能世界的名字》正是从这样一个“不对称”的问题视角展开对现代混合逻辑的研究。近年来, 国内外许多学者都对混合逻辑进行过深入探讨, 并且针对混合逻辑的模型论、证明论和计算复杂性等方面都出版了诸多著作。与这些著作不同的是, 《可能世界的名字》基础性地研究了混合逻辑在极小系统方面的成果。全书共十三章, 就研究成果而言, 大致可以分为两部分。第一部分(前十二章)全景式地介绍和研究了混合逻辑对模态逻辑的“不对称”问题所提供的解决方案, 包括模态逻辑的表达力以及模态证明论等问题; 第二部分(第十三章)结合当下最新研究动态, 构造了混合核证逻辑(hybrid justification logic)的极小系统, 将混合逻辑的语义内在化与核证逻辑(justification logic)的证明方法内在化这两种理念组合起来, 也由此解决了著名逻辑学家梅尔文·菲汀(M. Fitting)在2010年所提出的问题。值得一提的是, 该书于2017年入选《国家哲学社会科学成果文库》。下面我们概述该书的写作脉络和主要研究成果。

首先, 作者在前两章中叙述了混合逻辑的发展背景和研究动机, 以及标准模态逻辑的句法和语义。指出模态逻辑中存在关系语义与模态句法的“不对称”问题, 而混合逻辑以“词项用作公式”为核心思想, 在句法中为可能世界引入“名字”, 添加一类新的命题变元, 增强模态语言的表达力, 从而修复这种“不对称”。因此在第三章和第四章中, 作者在语言 $\mathcal{L}_{\mathbf{H}@}$ 中取最弱的正规模态语言闭包得到基本混合语言 $\mathbf{K}_{\mathbf{H}@}$, 基于 $\mathbf{K}_{\mathbf{H}@}$ 构造了基本混合逻辑的极小公理系统 $\mathbf{HK}_{\mathbf{H}@}$, 并证明了其中的一般完全性理论。也就是对基本混合语言 $\mathbf{K}_{\mathbf{H}@}$ 进行扩充, 加入在 $\mathbf{HK}_{\mathbf{H}@}$ 中可容许的规则“从 $\vdash @_i\phi$ 推出 $\vdash \phi$ ”和“从 $\vdash @_i\Diamond\phi \rightarrow @_j\phi$ 推出 $\vdash @_i\Box\phi, i \neq j, j \notin \phi$ ”, 得到 $\mathbf{HK}_{\mathbf{H}@}^+$ 。假设 Γ 是一个纯公式集合, 那么 $\mathbf{HK}_{\mathbf{H}@}^+ + \Gamma$ 对于由 Γ 定义的框架类来说是完全的。这一完全性的证明杂糅了模态逻辑的完全性证明思路和一阶逻辑的完全性证明思路, 也就是将典范模型与亨金构造混合使用。而在得到 $\mathcal{L}_{\mathbf{H}@}$ 中纯完全性结果的同时, 作者还得到了混合的萨奎斯特完全性。后一结果的获得过程相较于标准模态逻辑中相应结果的获得过程要更为简单。

在介绍完基本混合语言后, 作者介绍了表达力严格强于基本混合语言的混合

时态语言，并在第六章中对基本混合语言进行了扩充，考察了加入全局模态词 A 、差异模态词 D 、模态约束词 \downarrow 和 \forall 等算子的语言。其中，带有量词的语言 $\mathcal{L}_{\mathbf{H}@V}$ 具有完整的一阶语言的表达力，任何一阶公式都可以直接写成 $\mathcal{L}_{\mathbf{H}@V}$ 的公式。但表达力的提升并不需要付出额外的代价。在第七章中，作者论述了混合语言在可判定性、复杂性和内插性上都得到了良好的保持。

在讨论完各种混合语言的表达力后，该书转向模态证明论的问题。

在第八章至第十二章中，作者较为全面地介绍了混合逻辑的各类演绎系统，并描绘出它们最有价值的特征，也就是在每一种演绎系统中都构造出一个混合逻辑的极小系统，并考察该系统在更强语言和逻辑中的一致扩展问题。这种广角式的比较研究既突出了模态证明论的重要性，也指出在混合逻辑中这些证明方法所具备的良好性质。

第十三章解决了混合核证逻辑的极小系统问题，也就是将菲汀构造的核证逻辑 \mathbf{JT} 的混合版本弱化到核证逻辑 \mathbf{J} 的混合版本 $\mathbf{JH}@$ 。首先，作者给出了 $\mathbf{JH}@$ 的语言和公理系统， $\mathbf{JH}@$ 的语言 $\mathcal{L}_{\mathbf{JH}@}$ 是将核证逻辑语言 $\mathcal{L}_{\mathbf{J}}$ 与混合语言 $\mathcal{L}_{\mathbf{H}@}$ 的部分语言相结合外加一些新符号所共同构成。 $\mathcal{L}_{\mathbf{JH}@}$ 中的合式公式由下述规则定义：

$$\phi ::= i \mid p \mid \perp \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi \mid t : \phi \mid @_i\phi$$

其中 t 是一个核证项。 $t : \phi$ 被称为核证式，表示 ϕ 是一个 t 作为核证所确定的事件。与句法的构成相似， $\mathbf{JH}@$ 中的公理也是由混合逻辑与核证逻辑的部分公理以及新符号对应的公理所共同组成。在此基础上，作者进一步证明了 $\mathbf{JH}@$ 的内在化定理，完全性定理和显式性定理。一般而言，内在化是核证逻辑的一个重要性质，只有具备这个性质，显式性才能成立，从而才能将核证逻辑与模态逻辑对应起来。而 $\mathbf{JH}@$ 中的内在化证明省去了对自返性典范的事实公理，只依靠核证逻辑和混合逻辑的其他公理，也就是在定理证明中的某一归纳步骤上，不使用事实公理而是从其他现有公理中直接得出结论。在证明完全性定理时，作者首先通过林登鲍姆引理构造一个 $\mathbf{JH}@$ 的基础模型 $M_1 = \langle G_1, R_1, \varepsilon_1, V_1 \rangle$ ；然后进一步构造 M_1 的生成子模型 M_2 ，同时它也是 $\mathbf{JH}@$ 的典范模型；最后验证 M_2 是否符合 $\mathbf{JH}@$ 的语义条件并证明真值引理，由此就证得了 $\mathbf{JH}@$ 的完全性。混合的核证逻辑不仅在逻辑上将混合逻辑语义内在化与核证逻辑证明方法内在化的特征结合起来。还能在哲学上将“葛提尔问题”与指称理论相结合，进一步对知识概念进行阐述和分析。

实际上，中国社科院哲学所逻辑室在研究逻辑极小系统方面有着长久的学术传统，例如张清宇 ([3]) 和王学刚 ([1]) 在此方面的研究成果颇为显著。《可能世界的名字》延续和继承了这一传统。作者们着眼于混合逻辑的极小系统方面，深入研究和应用了混合逻辑“词项用作公式”的基本思想，既解释和说明了这一思

想在经典模态逻辑领域中的作用和意义，又利用它解决了当下的前沿问题，使得该书对混合逻辑的研究既是基础性的，又是启发性的。并且书中给出的一些开放性问题也很值得我们跟进，例如：假设在命名模型的情况下，如何在混合的核证逻辑中证明内在化定理？对这类问题的讨论既可以在表达力和元定理方面推进混合逻辑的研究，也可以在哲学上对有关知识的概念进行深层次的澄清和表达。

参考文献

- [1] X. Wang, 1992, "The minimal system L'_0 ", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **33(4)**: 569–575.
- [2] 刘新文、祝瑞，可能世界的名字，2017年，北京：中国社会科学出版社。
- [3] 张清宇，“极小的弗协调 **U**、**S** 时态命题逻辑”，王路、刘奋荣（主编），逻辑、语言与思维——周礼全先生八十寿辰纪念文集，第138–154页，2002年，北京：中国科学文化出版社。

闫佳亮 清华大学人文学院 yan-jl19@mails.tsinghua.edu.cn